Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2019-2020
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1

Examen d'Analyse
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.($3pts$)

(1) Rappeler l'énoncé de la propriété de la borne supérieure.
(2) Soit $A = \{x^2 + y^2,\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}/\ xy = 1\}$
   (a) Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.
   (c) Que peut on-dire de la borne supérieure?
   (*On pourra considérer les suites* $x_n = n$ *et* $y_n = \dfrac{1}{n}$)

Exercice 2.($5pts$)

(1) (a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis et donner sa démonstration.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} < 2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n > 2\sqrt{n+1} - 2$
   (b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
(3) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général:

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   (b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim v_n \in [-2, 0]$.

Exercice 3. ($4pts$)

(1) Rappeler l'énoncé de théorème de Rolle et du théorème de valeurs intermédiaire.
(2) **Application :** Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(1)f(1) < 0$. On introduit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} & si\ x \in [0, 1[\\ f'(1) & si\ x = 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4. (8*pts*)

(1) **Question de cours:**
   (a) Rappeler la définition des fonctions sinh et cosh puis donner leurs tableaux de variations.
   (b) Montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(2) Le but de cette question est d'étudier les variations des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \cosh^2 x + \sinh x, \quad g(x) = e^{\sinh x} - x - 1.$$

   (a) Justifier que l'équation $2\sinh x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution. (*On ne demande pas de calculer* a).
   (b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \dfrac{3}{4} > 0$.
   (c) Donner le domaine de dérivation de g et calculer sa dérivée.
   (d) Montrer que la fonction dérivée g' est croissante (*on pourra calculer* $g''(x)$).
   (e) Calculer $g'(0)$ puis étudier les variations de la fonction g.
   (f) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

(3) Le but de cette question est de déterminner la nature de la suite $(S_n)_n$ définie pour tout $n \geq 2$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \sinh\left(\frac{1}{k}\right)$$

   (a) Montrer que : pour tout $x \in]0, 1[$

$$1 + x \leq e^{\sinh x} \leq \frac{1}{1-x}$$

   (*On pourra utiliser la question précédente*).
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$

$$\ln\left(\frac{3n+1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{3n}{n-1}\right)$$

   (c) Déterminer alors la nature de la suite $(S_n)_n$.